

Inhalt		
Editorial	Seite 1	
Aufgabenidee: Für 20 Euro Geometrie	Seite 1-2	Serie: Aufgaben zum Knobeln: Das Problem der fernöstlichen Kamele
Finanzmathematik: Effektivzinssatz eines Privatkredites	Seite 2	Schülermeinung: Die Class- Wiz-Serie und der QR-Code
CAS-Rechner: Der ClassPad II als Kontrollinstrument	Seite 3	Parametervariation mit dem ClassPad II: Einsatz von Schiebereglern
		Nullstellenberechnung: Und er berechnet sie doch!
		Dokumentation: „Ich habe die Gleichung nach x gelöst.“
		Messungen mit dem C-Lab: Neues Messwerterfassungs- system / Titration
		Impressum

## Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum finden Sie Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz der Schulrechner von CASIO. In dieser Ausgabe gibt es einige Schlaglichter auf die Welt der Schüler zu entdecken: Eine Schülerin berichtet über ihre Erfahrungen mit dem FX-991DE X der neuen ClassWiz-Serie. Außerdem erfahren Sie, wie Schüler die Bildschirmanzeigen ihrer Rechner zu Papier bringen.

Natürlich gibt es auch Motivierendes für Ihren Unterricht: etwa wie viel Mathematik auf einem 20-Euro-Schein zu finden ist, wie sich die neuen Schieberegler des ClassPad II zur besseren Anschauung integrieren lassen und was das Programm „Finanzanwendung“ leistet. Obwohl fast jeder Grafikrechner von CASIO diese Anwendung besitzt, wird sie im Unterricht in Deutschland selten genutzt. Ein österreichischer Lehrer stellt in seinem Beitrag Anwendungsmöglichkeiten dieses Programms vor.

Natürlich führen wir die in der letzten Ausgabe begonnene Serie mit Knobelaufgaben fort, sie werden ohne Lösungsvorschlag abgedruckt. Versuchen Sie doch einmal selbst, den besten Weg durch die Wüste zu finden!

Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an [education@casio.de](mailto:education@casio.de).

Ihr Redaktionsteam  
CASIO Educational Projects

P.S.: Kennen Sie eigentlich schon das C-Lab zur Messwerterfassung?

## Aufgabenidee zum FX-CG20

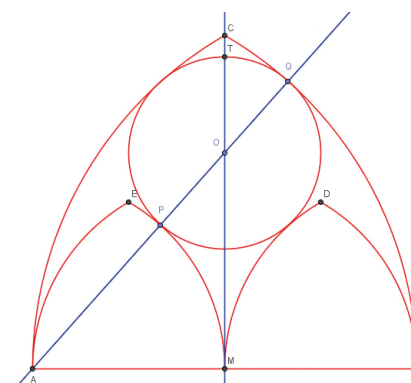
### Für 20 Euro Geometrie

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium  
Münstermaifeld



**Der 20-Euro-Schein zeigt ein Fenster der berühmten Kathedrale von Lincoln, die als eins der bedeutendsten Werke der englischen Gotik gilt.**

Sei  $C$  der Schnittpunkt zweier Bögen mit dem Radius  $AB$  um  $A$  bzw.  $B$  sowie  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Die Bögen mit Radius  $MB$  um  $A$ ,  $M$  und  $B$  schneiden sich in den Punkten  $D$  und  $E$ .  $O$  sei Mittelpunkt des Zentralkreises, der tangential die vier Bögen berührt.  $T$  sei der obere Schnittpunkt des Zentralkreises mit der Strecke  $CM$ .



## Fortsetzung: Aufgabenidee zum FX-CG20

- a) Bestimme den Radius  $\overline{OT}$  des Kreises.  
 b) Bestimme das Verhältnis der Strecken  $\overline{TM}$  zu  $\overline{BM}$ .

### Lösung:

a) Sei  $R = \overline{BM}$  der Radius der inneren Spitzbögen. Dann beträgt der Radius des äußeren Spitzbogens  $\overline{AB} = 2R$ . Seien P der Punkt, an dem der Innenkreis den Bogen ME berührt, und Q der Punkt, an dem der Zentralkreis den Bogen BC berührt. Sei ferner  $r = \overline{PQ} = \overline{OQ} = \overline{OT}$  der Radius des Zentralkreises. Dann gelten

$$(1) \overline{BO} = \overline{BP} + \overline{OP} = R + r \text{ sowie}$$

$$(2) \overline{BO} = \overline{BQ} - \overline{OQ} = 2R - r.$$

Daraus ergibt sich

$$R + r = 2R - r \text{ bzw. } r = \frac{1}{2} R.$$

b) Berechnung von  $\overline{TM}$ :

$$\overline{BO} = R + r = \frac{3}{2} R.$$

Der Satz von Pythagoras, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck BMO liefert nun

$$\overline{MO} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

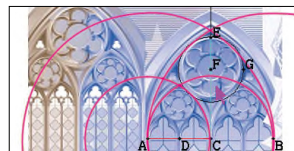
$$\overline{MT} = \overline{MO} + \overline{OT} = \frac{\sqrt{5}}{2}R + \frac{1}{2}R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R$$

Somit ist

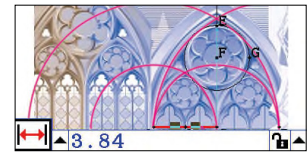
$$\frac{\overline{MT}}{\overline{BM}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Daher ist das Verhältnis der Höhe des zentralen Kreises und der Basishälfte des Bogens die goldene Zahl.

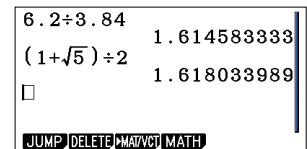
Mit dem Geometrie-Modul des CG20 kann dieses Ergebnis experimentell leicht nachvollzogen werden. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit auf dem kleinen Bildschirm können alle Objekte mit **[SHIFT] [5]** (Format) hinsichtlich Linienstärke und Liniendarstellung gestaltet werden. Zunächst ist aber mithilfe der Software „Picture Conversion Engine“ der gewünschte Bildausschnitt zu erstellen und als Bildschirmhintergrund in das Geometriemodul zu laden.



A, B und C sind die Mittelpunkte der Kreise, welche die Spitzbögen bilden, F ist Mittelpunkt des Kreises K, der diese Kreise gerade berührt. E ist Schnittpunkt von K mit der Mittelsenkrechten von AB.



Die Messung der Strecken  $\overline{AC}$  und  $\overline{CE}$  erfolgt jeweils nach Auswahl mit der Taste **[VARS]**.



Als Verhältnis der Strecken  $\overline{AC}$  zu  $\overline{CE}$  ergibt sich 1,615, was dem oben gezeigten theoretischen Wert von 1,618, also der Zahl des Goldenen Schnitts, sehr nahekommt.

In der Architektur wurde der Goldene Schnitt immer wieder als Stilmittel verwendet, z. B. am Parthenon in Athen, dem Eiffelturm und dem Leipziger Rathaus. Schicken Sie Ihre Schüler anhand von Fotos auf Entdeckungsreise!

Nach: Ricard Peiró i Estruch: *Geometría en el billete de 20 euros*. Casio News, Barcelona 2014.

## Die Finanzmathematik-Anwendung des ClassPad II

# Effektivzinssatz eines Privatkredites

Autor: Ernesto Millendorfer, BHAK Eisenstadt, Österreich

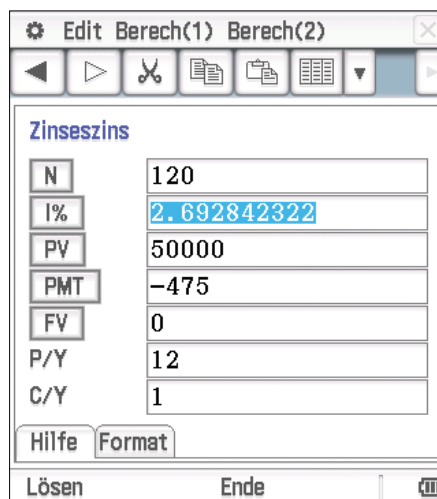
Die Finanzmathematik-Anwendung des ClassPad II ist ein mächtiges Tool, das als Black Box viele Probleme der Finanzmathematik auf einfache Art lösen kann. Zeitaufwendige Berechnungen können praktisch auf Knopfdruck gelöst werden. Dem Lehrer und der Klasse bleiben damit mehr Zeit zum Modellieren, Interpretieren und Argumentieren.

Die folgenden Beispiele sollen einen kleinen Überblick über die Möglichkeiten der Anwendung geben. Generell gilt, dass zu zahlende Beträge negativ eingegeben werden:

Für einen Privatkredit in der Höhe von € 50.000,00 muss Herr Mayer 10 Jahre lang, monatlich nachschüssig die Kreditrate von € 475,00 bezahlen.

Die folgende Berechnung erfolgt nach dem Bankwesengesetz. Aus dem Zahlungsstrom ergibt sich die Äquivalenzgleichung, die nach dem Zinssatz  $i$  zu lösen ist:

$$50\,000 = \sum_{t=1}^{120} 475 \cdot (1+i)^{-\frac{t}{12}}$$



Die Effektivverzinsung des Kredites beträgt  $i \approx 2,69\%$ .

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man in der Main-Anwendung die obige Gleichung löst.

**N = 120** Anzahl der vollen Monatsraten  
**I% = 2,69** Effektivzinssatz  
**PV = 50 000** Barwert der Rente; positiv  
**PMT = -475** Monatsrate; negativ  
**FV = 0** Rest = 0  
**P/Y = 12** 12 Raten pro Jahr  
**C/Y = 1** 1 Zinsperiode pro Jahr  
**Ende** nachschüssige Rente

$$\text{solve}\left(50000 = \sum_{t=1}^{120} \left(475 \cdot (1+i)^{-\frac{t}{12}}\right), i\right)$$

{i=0.02692842322}

Schüler können beobachten, welche Auswirkungen die Veränderung einzelner Werte hat.

Weitere Aufgabenbeispiele zur Finanzmathematik und generell zum ClassPad II finden Sie unter [www.casio-schulrechner.at](http://www.casio-schulrechner.at)

# Der ClassPad II als Kontrollinstrument

Autor: Christoph Kost, Werner-von-Siemens-Schule Wiesbaden

**Es wird eine neue Sichtweise auf den CAS-Rechner-Einsatz entwickelt. Der ClassPad<sup>1</sup> wurde ein Jahr lang als Kontrollinstrument in einer 5. Realschulklasse eingesetzt.**

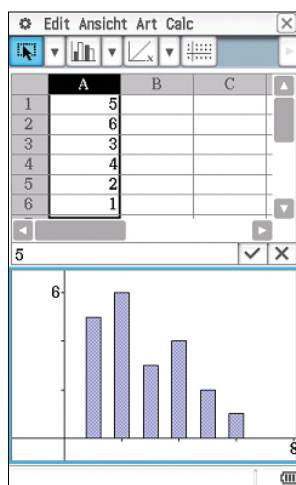
**Normalerweise werden Taschenrechner im 8. Schuljahr eingeführt. Der ClassPad II allerdings eignet sich in der Funktion als Kontrollinstrument schon in der Jahrgangsstufe 5. Der Rechner wird zu keinem Zeitpunkt als Rechenmaschine genutzt. Kopfrechnen ist Pflicht!**

Der Einstieg mit dem ClassPad II ist bereits im Mathematikunterricht der 5. Klasse möglich. Die SchülerInnen erstellen vorgegebene Diagramme zunächst im Heft und kontrollieren dann mit dem ClassPad II. Diesen Vorgang beschreiben sie in eigenen Worten. Hierdurch fördern Sie insbesondere die mathematische Kommunikation. Diese bleibt sonst im 5. Schuljahr eher oft unberücksichtigt. Nach einer kurzen Einführung in die Tabellenkalkulation können die SchülerInnen sehr schnell diese Funktion nutzen.

Eine Aufgabe, die den Notenspiegel der letzten Mathearbeit berücksichtigt, eignet sich immer! Beim Einbeziehen der Kinder in die Aufgabenstellungen steigt die Motivation zur Bearbeitung.

Die **letzte Klassenarbeit** lieferte die folgenden Ergebnisse: Stelle das Abschneiden der Klasse grafisch dar!

Note	1	2	3	4	5	6
5a	5	6	3	4	2	1



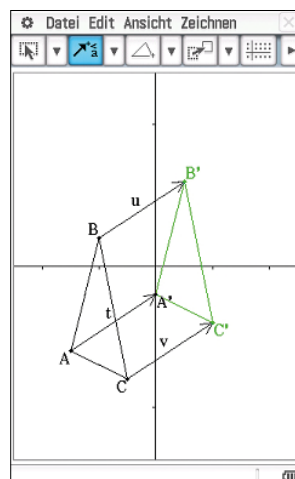
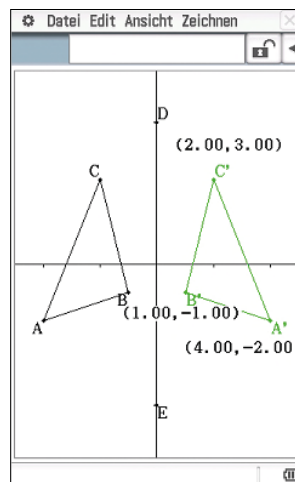
Weitere Aufgaben könnten wie folgt lauten: Schau in deine Schultasche und notiere die Anzahl der Hefte, Bücher, Buntstifte und Filzstifte. Stelle die Daten grafisch dar! Überlege dir selbst eine solche Datenerhebung und löse sie in Partnerarbeit mit dem ClassPad II. Das Arbeiten mit dem ClassPad II ist auch im 6. Schuljahr möglich.

Der Einstieg erfolgt mit dem Zeichnen von Dreiecken. Die SchülerInnen zeichnen willkürlich Dreiecke durch das Verschieben von Eckpunkten und das Zeichnen von Strecken. Diesen Vorgang beschreiben sie in eigenen Worten. Sie benennen die Winkelarten, schätzen die Größe der Winkel sowie die Längen der Dreieckseiten und bestimmen anschließend die Maße mit dem ClassPad II.

Eine weitere Möglichkeit des Einstiegs sind die geometrischen Abbildungen. Spiegelungen lassen sich mit dem ClassPad II leicht erzeugen und auch schnell kontrollieren. Mit der folgenden Aufgabe kann man wiederum den technischen Umgang sowie die mathematische Kommunikation fördern.

Zeichne das Dreieck A, B, C mit den Punkten A(-4/-2), B(-1/-1) und C(-2/3) und spiegle es an der y-Achse. Notiere dann die Bildpunkte A', B' und C'. Beschreibe hinterher genau, wie du vorgegangen bist.

Die Beschreibung sollte sich hierbei zunächst auf das händische Vorgehen beziehen und dann in zweiter Instanz auf das Arbeiten mit dem Rechner. Hierbei lassen sich auch Zweiergruppen bilden, die sich in den Erklärungen zunächst aufteilen und später ergänzen.



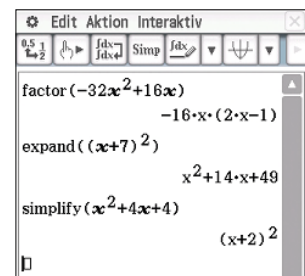
Ebenso wie Spiegelungen lassen sich die Verschiebungen zunächst händisch anfertigen und dann mit dem ClassPad II kontrollieren.

Dies sind alles Möglichkeiten, den ClassPad II als Lernwerkzeug einzusetzen und ihn eben nicht primär als Taschenrechner zu verwenden.

Eine weitere Nutzungsmöglichkeit findet sich beim Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen.

SchülerInnen erhalten die folgende Aufgabenstellung:

Untersuche die Wirkung von „factor“, „simplify“ und „expand“ auf folgendem Beispiel:



Beschreibe die Veränderung der Terme durch den ClassPad II. Dokumentiere die Rechenwege. Zum wiederholten Male steht die mathematische Kommunikation im Vordergrund. An dieser Stelle lernen die Schüler erstmalig den Taschenrechner als Helfer kennen. Er hilft zunächst beim Zusammenfassen bzw. Zusammenfassen von Termen und ist dann zeitnah wieder das Kontrollinstrument beim Lösen linearer Gleichungen.

Anfänglich wurde von den Eltern fast ausnahmslos sehr negativ über den Einsatz befunden. Aussagen wie z. B. „Mein Kind lernt dann ja nie Kopfrechnen“ oder „Handy, Tablet, PC und jetzt auch noch Taschenrechner-Computer, mein Kind ist ja nur noch mit Technik unterwegs“ wurden mehrfach geäußert. Nach einer ersten ausführlichen Vorstellung bei einem Elternabend besserte sich die Einstellung. Nachdem die Schüler allerdings „erste Schritte“ mit dem Gerät unternommen hatten, waren viele Eltern sehr angetan und freuen sich über die zusätzliche Möglichkeit „Mathematik in 3D“ zu begreifen. Die zusätzliche Möglichkeit, zu jedem Zeitpunkt im eigenen Lerntempo und unmittelbar Lösungen kontrollieren zu können, wurde ebenfalls sehr begrüßt.

Die anfangs beschriebene Klasse kommt im Schuljahr 2015/16 ins 7. Schuljahr. SchülerInnen und Eltern fragen schon jetzt nach weiteren Möglichkeiten mit dem ClassPad II zu arbeiten. Was kann man sich als Lehrer anderes wünschen als ein interessiertes Publikum.

<sup>1</sup> Im eigentlichen Projekt wurde größtenteils der ClassPad 330 genutzt, für den Artikel wurden die Screenshots mit dem ClassPad II erstellt.

# Das Problem der fernöstlichen Kamele

Autor: Die Aufgabe wurde von Klaus Stender im Rahmen des CiMS-Projekt Hamburg entwickelt.

Am Rande der Öde Gabi liegen die beiden Oasen „Zum saufenden Drachen“ (D-Oase) und „Beim durstigen Kamel“ (K-Oase) genau 270 LI voneinander und auf der gleichen Seite der kaiserlichen Heerstraße, jeweils genau 60 LI von dieser entfernt.

Der Geschäftsmann Kao Fang handelt in der D-Oase und will seinen Geschäftspartner Lo Kwan in der K-Oase besuchen. Er könnte die Strecke direkt durch die Wüste zurücklegen – jedoch müsste er einen erheblichen Wasservorrat mitnehmen, was die Reisekosten für die Karawane in die Höhe trieb. Man rechnet bei Wüstenritten mit einem Kostenaufwand von 800 YUAN pro LI.

Kao Fang könnte jedoch auch zunächst durch die Wüste zur Heerstraße reiten, dann auf dieser wesentlich kostengünstiger reisen, um dann wieder durch die Wüste die K-Oase zu erreichen. Auf der Heerstraße gibt es einige (Wasser-) Tankstellen, sodass dort nur 200 YUAN pro LI zu veranschlagen sind.

1. Fertigen Sie eine Lageskizze an.
2. Berechnen Sie die Kosten, die bei einem direkten Ritt von der D-Oase zur K-Oase entstehen.
3. Geben Sie mindestens zwei verschiedene Wege an, die zum Teil über die Heerstraße führen. Berechnen Sie die Kosten für diese Wege.

4. Berechnen Sie die mindestens entstehenden Kosten, wenn er die Heerstraße genau 200 LI lang benutzt.
5. Untersuchen Sie, wie er reisen muss, um die Kosten zu minimieren. Berechnen Sie die dazugehörigen Kosten.
6. Diese Aufgabe ist auch ohne Differenzialrechnung lösbar. Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Lösungswege.



## ● Schülermeinung

# Die ClassWiz-Serie und der QR-Code

Autorin: Johanna Niedenthal, Schülerin der Marienschule Offenbach

Im Unterricht zum Thema Funktionen muss oft viel überlegt und gerechnet werden, um zum Beispiel darauf zu kommen, wie der Graph einer quadratischen Funktion im Koordinatensystem aussehen wird. Dies ist nun mithilfe der QR-Code-Funktion der neuen ClassWiz-Serie sehr viel einfacher geworden.

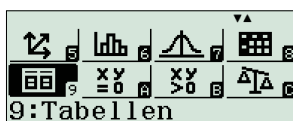
### Aufgabe:

Gegeben sind die beiden Funktionsgleichungen:

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = -2(x + 1)^2 + 3$$

Zeichne den Graph der Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Voraussetzung zur Nutzung der QR-Funktion ist es, dass eine App zum Scannen von QR-Codes auf das Smartphone oder den Tablet-Computer heruntergeladen wurde. Außerdem muss dieses Gerät einen Internetzugang haben.



Im Modus Tabellen (MENU 9) des FX-991DE X werden zuerst Wertetabellen für die beiden Funktionsgleichungen erstellt. Dazu werden die beiden Gleichungen eingegeben und der Tabellenbereich (Start- und Endwert) sowie die Schrittweite werden festgelegt.

$$g(x) = -2(x+1)^2 + 3$$

Der Tabellenbereich ist beliebig wählbar. Ich wählte als Startwert -6, als Endwert 6 und als Schrittweite (Inkre) 0,5.

Tabellenbereich  
Start: -6  
Ende: 6  
Inkre: 0,5

In diesem Bereich liegen erfahrungsgemäß fast alle Funktionsgraphen, die in der Schule gezeichnet werden sollen.

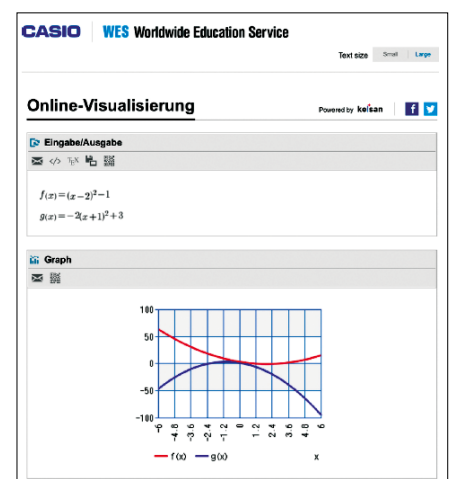
x	f(x)	g(x)
-6	5,25	2,5
-5,5	3	1
-5	1,25	-1,5
-4,5	0	-3

Durch die Tastenkombination SHIFT OPTN (QR) wird der QR-Code erzeugt und im Display angezeigt.



Dieser kann einfach mit dem Smartphone oder Tablet gescannt werden. Sofort zeigen sich die Funktionsgleichungen und die beiden Parabeln im Display. Zum Beenden der QR-Code-Anzeige auf dem Rechner drückt

man AC oder SHIFT OPTN (QR). Mithilfe des QR-Codes können sich Schüler den Verlauf des Funktionsgraphen sehr gut vorstellen, bevor sie ihn auf Papier zeichnen. Außerdem ist auch der Ansporn des Ausprobierens groß, ganz schnell ist der Graph auf dem Display und es ist zu erkennen, wie die Graphen verschiedener Funktionen aussehen.



In Kürze wird ein speziell auf den Kontrast der Taschenrechner-Displays zugeschnittener QR-Code Reader erscheinen. Diese App kann auf verschiedenen Smartphones und Tablets installiert werden und bietet neue Zusatzfunktionen für die Rechner der ClassWiz-Serie. Informationen finden Sie unter [www.casio-schulrechner.de](http://www.casio-schulrechner.de).

# Einsatz von Schiebereglern im Unterricht

Autor: Dr. Jörg Nothdurft, Hainberg-Gymnasium Göttingen

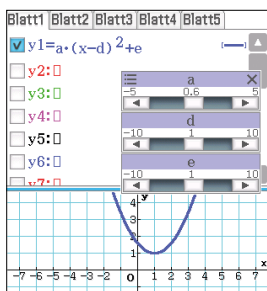
**Anhand von Unterrichtsbeispielen soll aufgezeigt werden, wie ein funktionaler Einsatz des Schieberegler-Werkzeugs des ClassPad II die Kompetenzausbildung sinnvoll in verschiedenen Bereichen unterstützen kann und welche Aspekte bei dem Einsatz im Unterricht zu beachten sind.**

Die Auseinandersetzung mit funktionalen Zusammenhängen ist eine tragende Leitidee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Nach den Bildungsstandards sollen die Lernenden „kennzeichnende Merkmale von Funktionen bestimmen und Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph herstellen“. In diesem Kontext ist die Ausbildung der verschiedenen Grundvorstellungen eines funktionalen Zusammenhangs (Kovariations-, Zuordnungs-, Objektaspekt) im Unterricht fundamental. Durch Betrachtung der Parameterabhängigkeit von Funktionen können Merkmale durch exploratives Arbeiten entwickelt werden.

## 1. Graphenlaboratorium mit CAS-Einsatz am Beispiel quadratischer Funktionen

Durch Einsatz von Schiebereglern im Grafiken-Menü des ClassPad II können diese Zusammenhänge von den Lernenden entdeckt und verallgemeinert werden. Insbesondere bieten sich dadurch methodische Möglichkeiten (Förderung kooperativen Lernens) und die Vermeidung eines kleinschrittigen Vorgehens, welches im Unterricht die Parameter nacheinander einzeln behandelt.

Andererseits ist darauf zu achten, dass durch den Einsatz des ClassPad II der Lernprozess nicht zu stark beschleunigt wird, sodass scheinbar Offensichtliches unverstanden bleibt. Vor der explorativen Phase erfolgt daher eine Phase der „Kopfanalyse“, in der Hypothesen ausgehend von der Normalparabel aufgestellt werden. Im Anschluss an die explorative Phase mittels des Schieberegler-Einsatzes werden die Entdeckungen klassifiziert und die Begründungen der Lernenden auf deren Tragfähigkeit hin untersucht.

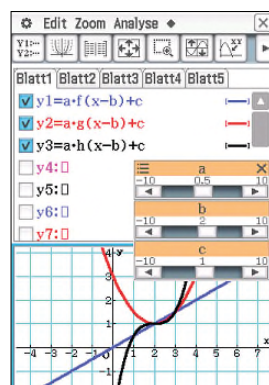


Ziel ist somit sowohl die Entdeckung wie auch eine erste Begründung der Zusammenhänge anhand der Funktionsterme. Eine vollständige analytische Begründung muss im Anschluss erfolgen.

Bei der „termfreien“ Parametervariation in Anlehnung an PINKERNELL erfolgt eine Änderung der Graphen von Funktionen mithilfe der Schieberegler, ohne dass die exakten Funktionsterme selbst ersichtlich sind [Pinkernell 09].

Dabei wird von den Schülerinnen und Schülern entdeckt, dass die Veränderungen bei allen Funktionen denselben Einfluss haben, sodass die Beschreibung und Begründung der oben genannten Auswirkungen direktes Ziel des Einsatzes ist.

- $a \cdot f(x)$ : Alle Graphen werden um den Wert von  $a$  gestreckt / gestaucht.
- $f(x - b)$ : Alle Graphen werden um den Wert von  $b$  entlang der Rechtsachse verschoben.
- $f(x) - c$ : Alle Graphen werden um den Wert von  $c$  entlang der Hochachse verschoben.
- „Die Verschiebung in  $x$  ( $y$ )-Richtung wird von  $x$  ( $y$ ) subtrahiert.“



Zur Erzeugung der obigen Graphen wurden im Main-Menü drei Ausgangsfunktionen vorab definiert. Eine Definition anderer, auch bis dahin den Lernenden unbekannter Funktionen ist hier möglich.

```
Define f(x)=x
Define g(x)=x^2
Define h(x)=x^3
```

Hierbei bietet es sich im Unterricht an, unterschiedliche Funktionen von den Lernenden auf dem ClassPad II des Sitznachbarn definieren zu lassen, sodass die Schülerinnen und Schüler die Funktionsterme nicht kennen.

Die Verwendung dieser „Black Box“ wird in einem zweiten Schritt dann zu einer „White Box“, wenn die gefundenen Zusammenhänge begründet werden müssen. Dieser Schritt ist dabei notwendig, um zum einen die argumentativen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler zu fördern, zum anderen das Verständnis über die Auswirkungen der Parametervariation für Funktionen auf den Graphen zu erzielen.

Der ClassPad II bietet im Bereich der Parametervariation die Chance, dass die Lernenden Verfahren, Begriffe und Zusammenhänge selbstständig und kreativ entdecken und entwickeln können.

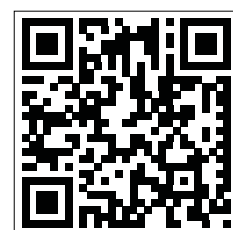
Darüber hinaus können durch bewusste Gestaltung der Arbeitsaufträge (Auforderungen zur Reflexion, zur Begründung, zum Darstellungswechsel usw.) prozessbezogene Kompetenzen gefördert werden. Durch den Einsatz von Schieberegler kann ein reflektierterer Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen, wie es z. B. beim datenbezogenen Modellieren realer Zusammenhänge skizziert ist, erfolgen.

Stets zu bedenken ist dabei, dass mit dem Einsatz im Unterricht auch Risiken verbunden sind, welche zum Beispiel ausführlicher bei BARZEL und WEIGAND genannt sind. So besteht die Möglichkeit, dass offensichtliche Zusammenhänge nicht durchdrungen werden, wenn die Lernprogression durch die Beschleunigung der Darstellung zu steil verläuft, dass Visualisierung von den Lernenden als Begründungsersatz genutzt wird und dass das Bedürfnis nach einer Begründung verloren geht. Es besteht die Gefahr, dass händische Fertigkeiten verlernt werden, wenn Aufgabenstellung und ClassPad-Einsatz nicht in Passung sind und eine explizite Förderung von Grundfertigkeiten und Basiswissen (etwa durch Kopfübungen) im Unterricht nicht erfolgt.

### Literatur:

[Barzel 08] Barzel, B.; Weigand, H.-G.: Medien vernetzen; in: Mathematik lehren, Ausgabe 146, S. 4 –10 (2008);  
 [BSM SEK I] Bildungsstandards;  
 [Pinkernell 09] Pinkernell, G.: „Wir müssen das anders machen“ – mit CAS funktionales Denken entwickeln; in: Der Mathematikunterricht, Ausgabe 4, S. 37–44 (2009).

Weitere interessante Unterrichtsbeispiele für den Einsatz von Schieberegler finden Sie in der Materialdatenbank.



[www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank](http://www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank)

# Und er berechnet sie doch!

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicky, Tangermünde

Für die Berechnung einer Funktions-Nullstelle werden zwei Möglichkeiten betrachtet:

- Das auf Zehnteilung erweiterte Bisektionsverfahren
- und das NEWTON'sche Tangentenverfahren.

Das Bisektionsverfahren beruht auf dem Satz, dass jede stetige Funktion, deren Funktionswerte an den Rändern eines abgeschlossenen Intervalls unterschiedliche Vorzeichen haben, in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle aufweist. Das ist eine Folgerung aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

Sind für eine stetige Funktion  $f$  die Zahlen  $a$  und  $b$  mit den Eigenschaften  $a > b$  und  $f(a) \cdot f(b) < 0$  gefunden, so kann die Lage einer Nullstelle von  $f$  präzisiert werden, indem das Intervall  $a \leq x \leq b$  halbiert und durch Vergleich der Funktionswerte an den Intervallgrenzen festgestellt wird, ob eine Nullstelle von  $f$  im linken oder im rechten Intervall liegt. Das Teilintervall mit der Nullstelle wird nun wieder halbiert usw.

Dieses Vorgehen wird effektiver, wenn das Intervall bei jedem Schritt in 10 äquidistante Teilintervalle zerlegt wird. Im TABLE-Modus ist das leicht möglich, das wird am Beispiel  $f(x) = x^x - 3$  gezeigt: Zunächst den Term  $x^x - 3$  eingeben, Startwert 1, Endwert 2 und die Schrittweite 0,1 wählen.

In der ausgegebenen Tabelle ist am Vorzeichenwechsel zu erkennen, dass eine Nullstelle zwischen 1,8 und 1,9 liegen muss.

x	f(x)
7	1,6 -0,878
8	1,7 -0,535
9	1,8 -0,119
10	1,9 0,3855

1,8

Wird die Taste  $\boxed{\text{AC}}$  betätigt, dann kann eine neue Wertetabelle erstellt werden, die Werte zwischen 1,8 und 1,9 abbildet. Bei der ClassWiz-Serie können Wertetabellen auch manuell ergänzt werden, indem zusätzliche x-Werte eingetippt werden.

x	f(x)
10	1,82 -0,026
11	1,83 0,0219
12	1,8221 -0,021
13	1,8221 -0,016

1,821

So wird bei jedem Schritt die Nullstelle um eine Dezimale genauer ermittelt. Eine Erörterung dieses Algorithmus vertieft das Verständnis für den Zwischenwertsatz. Das Tangentenverfahren, nach NEWTON

benannt, basiert auf der Idee, die Funktion  $f$  in der Nähe einer Nullstelle  $x$  durch ihre Tangente zu ersetzen. Die Nullstelle dieser Tangente ist oft ein besserer Näherungswert für die Nullstelle  $x$  von  $f$ . Die iterative Fortsetzung dieser Schritte kann zu einer Folge von Näherungswerten führen, die gegen die gesuchte Nullstelle konvergiert.

Die Iterationsgleichung für dieses Verfahren lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

In der Fachliteratur werden die Konvergenzbedingungen für dieses Verfahren diskutiert.

Eine erfolgreiche Anwendung ist nur möglich, wenn ein erster guter Näherungswert  $x_0$  und ein Term für die Ableitung  $f'(x)$  bekannt sind.

Für das Beispiel  $f(x) = x^x - 3$  ergibt sich:

$$f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Als erster Näherungswert für die Nullstelle von  $f$  kann  $x_0 = 1$  gewählt werden.

Die Folge der Näherungswerte entsteht rekursiv aus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{x_n} - 3}{x_n^{x_n} (\ln(x_n) + 1)}$$

Zunächst wird der Antwortspeicher Ans mittels der Tasteneingabe  $\boxed{1} \boxed{\text{=}}$  mit dem Wert 1 belegt, das ist die erste Näherungslösung  $x_1$ .

Anschließend wird die Iterationsgleichung unter Verwendung von  $\boxed{\text{Ans}}$  eingegeben:

$$\text{Ans} - \frac{\text{Ans}^{\text{Ans}} - 3}{\text{Ans}^{\text{Ans}} (\ln(\text{Ans}) + 1)}$$

Die Eingabe von  $\boxed{\text{=}}$  erzeugt die zweite Näherungslösung 3. Wiederholte Eingabe von  $\boxed{\text{=}}$  erzeugt sukzessiv eine Folge von Näherungswerten, die schnell gegen die gesuchte Nullstelle konvergiert. Wenn es schwierig ist, die Ableitung der Funktion  $f$  zu bilden, kann in der Iterationsgleichung der symmetrische Differenzenquotient eingesetzt werden:

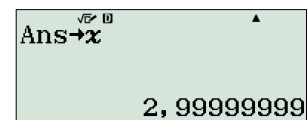
$$\frac{f(x_n + h) - f(x_n - h)}{2h}$$

Für  $h$  muss ein kleiner, aber nicht zu kleiner positiver Wert gewählt werden. Im Rahmen der Taschenrechnergenauigkeit liefert  $h = 0,0001$  häufig gute Ergebnisse. Für das Beispiel  $f(x) = x^x - 3$  ist folgendes Vorgehen möglich:

Zunächst den Speicher  $B$  mit dem Wert 0,0001 belegen und als ersten Näherungswert  $x_0 = 1$  in den Speicher  $\boxed{\text{X}}$ . Dann die rechte Seite der Iterationsgleichung eingeben und mit  $\boxed{\text{=}}$  bestätigen:

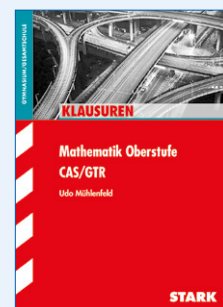
$$X - \frac{X^X - 3}{(X+B)^{X+B} - (X-B)^{X-B}} \cdot \frac{1}{2B}$$

Das führt zur zweiten Näherungslösung  $x_2 = 2,99999999$ . Mittels



wird dieser Wert in  $X$  gespeichert. Durch Eingeben von  $\boxed{\text{=}}$  und  $\boxed{\text{=}}$  wird der dritte Näherungswert  $x_3 = 2,576439676$  berechnet. Ständige Wiederholung der Eingaben  $\boxed{\text{=}}$  und  $\boxed{\text{=}}$  führt zur Näherungslösung  $\bar{x} \approx 1,825455023$ , die im Rahmen der Taschenrechnergenauigkeit nicht mehr verbessert werden kann. Die Berechnungen lassen sich natürlich auch mit dem FX-87DE Plus durchführen.

## Buchtipp



Das Buch beinhaltet 15 GTR- und 5 CAS-Klausuren. Einige Klausuren enthalten zusätzlich einen hilfsmittelfreien Teil. Die Screenshots für die ausführlichen Lösungen wurden mit dem FX-CG20 bzw. ClassPad II erstellt. Zudem bietet das Buch hilfreiche Lösungstipps zu jeder Aufgabe, Angaben zum Schwierigkeitsgrad, der zur Verfügung stehenden Zeit und den Bewertungseinheiten. Mühlenfeld, Udo: Klausuren Gymnasium – Mathematik Oberstufe. CAS/GTR. Hallbergmoos: STARK Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG 2014

# „Ich habe die Gleichung nach x gelöst.“

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

**Die Art der Dokumentation von Aufgaben, die Schüler mit GTR oder CAS lösen, ist unter Lehrern ein häufig diskutiertes Thema, zu dem sich bisher die Fachdidaktiker kaum geäußert haben. Bisher gibt es keinerlei verbindliche Hinweise oder Vorgaben der Kultusverwaltungen, und das, obwohl zahlreiche Bundesländer GTR- oder CAS-Rechner im Abitur empfehlen oder vorschreiben.**

Lediglich die Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012 stellen im Zusammenhang mit der Bewertung von Prüfungsleistungen Anforderungen an die Dokumentation von Schülerlösungen: „Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung.“

Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Die Beurteilung schließt mit einer Bewertung der von den Prüflingen erbrachten Leistung ab.“ (S. 30)

Von möglichen fachlichen Unzulänglichkeiten einmal abgesehen, ergeben die Analysen von Schülerlösungen folgende immer wieder zu beobachtenden Befunde:

- Die Dokumentation fällt häufig zu knapp aus.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$   
 1.  $f(-2) = 0$   
 2.  $f(2) = 0$   
 3.  $f(0) = 2$   
 4.  $f'(2) = 0$   
 $\rightarrow f(x) = \frac{7}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

- Lösungswege sind schwer nachvollziehbar, da Zusammenhänge nicht oder unzureichend erläutert werden. Beispiel (H.G. Weigand): Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ . Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(1|4)$ . Begründen Sie.

Gleichung Tangente =  $-2x + 6$   
 Begründung: Main Menü  $f(x) = (x-2)^2 + 3$   
 ableiten mit diff  
 Grafik Menü Analyse - Steze - Tangente

- Rechnersprache und Fachsprache werden vermischt. Rechnersprache ersetzt die Fachsprache. Es kommt zu Wortneuschöpfungen.

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} (f(x))$   
 $f(x)$  nach  $x$  gelöst!

Sicherlich muss dabei auch berücksichtigt werden, ob Lösungen von CAS-Anfängern, CAS-Fortgeschrittenen oder in Prüfungssituationen zu notieren sind. So kann bei CAS-Anfängern eine Dokumentation der Rechnerbefehle akzeptabel sein, wenn der CAS-Befehl kompakt notiert und dann mit mathematischen Begriffen beschrieben wird:

CAS: keyboard Math3 define  $f(x) = x^2 - 12x + 9$   
 $\hookrightarrow$  solve (( $f(x) = 0$ ),  $x$ )  
 $x = -3\sqrt{3} + 6, x = 3\sqrt{3} + 6$

Natürlich nicht zu akzeptieren ist die reine Angabe von Tastenfolgen, nicht nur, weil die Befehle nach einem Software-Update ganz woanders liegen können:

Ich drücke  $F2 - F3 - F6 - F3$

In Lernsituationen haben sich dabei 3-Spalten-Dokumentationen bewährt:

Erläuterungen zu Ansatz und zur dahinterstehenden Mathematik	CAS-Eingabe	CAS-Ausgabe

Bei fortgeschrittener Rechner-Erfahrung können dann elementare CAS-Eingaben und -Ausgaben zunehmend unterbleiben. Bei Klausuren und der schriftlichen Abiturprüfung erfolgt die Konzentration auf die mathematischen Hintergründe. Nur noch wichtige CAS-Befehle werden notiert.

Es gibt keine allgemeinen – kalkülmäßig festzulegenden – Regeln für die Lösungsdarstellung bei der Nutzung von GTR und CAS.

Aber es sollte klar sein, dass die Lösungsniederschrift fachlich korrekt und auch für Leser ohne Technologiekenntnisse jederzeit verständlich sein muss. Dabei haben die in den Aufgaben verwendeten Operatoren eine entscheidende Bedeutung für die Art der Lösungsdokumentation. So sind z. B. „Skizzieren“ und „Zeichnen“ klar zu trennen. Auch wenn zunächst ein CAS-Bild eines Graphen vorliegt, heißt „Zeichnen“, dass der Graph auf kariertem Papier, mit Bleistift unter Berücksichtigung charakteristischer Punkte und sonstiger Auffälligkeiten maßstabsgetreu gezeichnet werden muss. Große Unterschiede in Hinblick auf die Dokumentation bestehen auch zwischen den Operatoren „geben Sie an ...“, „ermitteln Sie ...“ und „berechnen Sie ...“. Soll händisch gerechnet werden, sollte dies ausdrücklich im Aufgabentext formuliert werden.

Die Bedeutung der Operatoren im jeweiligen Bundesland und die damit verbundene Erwartung an die Schülerleistung muss in Betracht gezogen werden. In der Praxis hat es sich bewährt, die Schülerinnen und Schüler mit Eintritt in die Oberstufe möglichst schnell mit der für die Bildungsstandards vom IQB vorgegebenen Operatorenliste vertraut zu machen. Sie sollte als Hilfsmittel wie die Formelsammlung oder das digitale Werkzeug bei allen Prüfungssituationen zur Verfügung stehen. Diese IQB-Liste wird bei der Formulierung der Prüfungsaufgaben des Aufgabenpools für das Abitur ab 2017 zugrunde liegen.

Das Erlernen von Dokumentationskompetenzen kommt aber nicht von allein. Hier muss die Lehrkraft steuernd einwirken durch z. B.

- **Motivierung:** Eine gelungene Dokumentation ist für den Schüler wichtig z. B. zur Prüfungsvorbereitung, sie kann für andere nützlich sein für Transparenz und bei der Bewertung (Schüler, Lehrer, Eltern) und sie ist ästhetisch ansprechend

- **Organisation und Bewusstmachung:** Die Nachvollziehbarkeit der Lösungen muss gewährleistet sein, z. B. durch Angabe von Lösungsidee oder Skizzen, Zwischenergebnissen, erläuternden, kommentierenden oder begründenden Texten

- **Übungen zur Festigung:** Hinreichende Dokumentation wird bei jeder Hausaufgabe und jedem Test eingefordert, gute und schlechte Beispiele werden thematisiert und falls sinnvoll auch sanktioniert, Lehrer sollte Vorbild sein

Zum Abschluss sei Hans Schupp zitiert: „Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer schon lange hätten nachdenken müssen.“

## Neues Messwerterfassungssystem

Die elektronische Messwerterfassung für Grafik- und CAS-Rechner wird immer bedeutender. In vielen Lehrplänen ist das Arbeiten mit der Messwerterfassung zumindest empfohlen – im Unterricht und in der Prüfung. Die niederländische Firma CMA kann auf 25 Jahre Erfahrung in der Entwicklung von Messwerterfassungssystemen für Schulen und Universitäten zurückblicken. In Zusammenarbeit mit CASIO ist das neue CMA C-Lab entstanden, welches das bisherige CASIO EA-200 ablöst. Dabei schlägt das CMA C-Lab die Brücke zwischen der bisher erhältlichen Messwerterfassung und den neuen Möglichkeiten. Der integrierte

USB-Anschluss lädt nicht nur den internen, leistungsstarken Akku des C-Lab, sondern ermöglicht auch die Kommunikation mit dem PC, und in Verbindung mit der Software CMA-Coach auch die Echtzeitmessung am PC. Selbstverständlich arbeitet das CMA C-Lab mit nahezu allen Grafik- und CAS-Rechnern von CASIO und hält dafür eigens eine serielle Schnittstelle bereit.

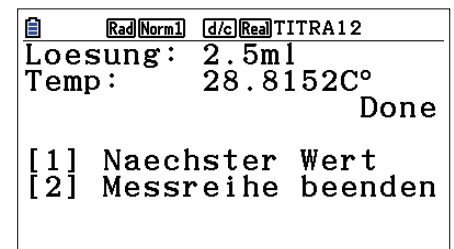
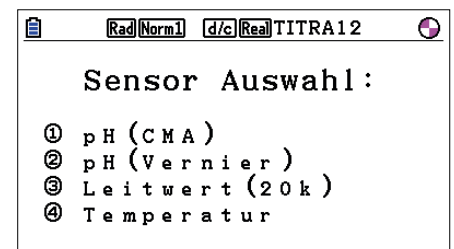


Dazu ist das C-Lab kompatibel zu den bisher erhältlichen Sensoren und arbeitet, wie gewohnt, mit der Software E-CON 2 zusammen, die Teil Ihres Taschenrechner-Betriebssystems ist. Für die Erweiterung oder auch Neuausstattung hält CMA eine sehr umfangreiche Auswahl an Sensoren für die Physik, Chemie und auch Biologie bereit. Im Lieferumfang des C-Lab ist ein Spannungs- und ein Temperatursensor enthalten. Als Highlight sei noch der integrierte 3-Achsen-Beschleunigungssensor erwähnt. Das CMA C-Lab ist ab sofort bei Ihrem Händler für Schulrechner erhältlich.

## Titration - Messwerte in der Chemie

In Sachsen wird das Arbeiten mit der elektronischen Messwerterfassung im Lehrplan empfohlen. In der Physik wird dies schon seit einigen Jahren praktiziert, jetzt können auch die Chemiker die Vorteile der elektronischen Messwerterfassung nutzen – sowohl im Unterricht als auch in der Prüfung. Gegenüber den Kolleginnen und Kollegen aus der Physik haben die Lehrkräfte der Chemie den CASIO-Grafik- oder CAS-Rechner nur sehr selten im Einsatz. Deshalb haben wir für den populärsten Versuch in der Chemie – die Titration – eine besonders einfache Lösung erstellt, die wenig Vorkenntnisse mit dem Taschenrechner benötigt. Das Programm „Titration 1.2“ für Ihren GTR können Sie in unserer Materialdatenbank herunterladen. Die Bedienung ist einfach. Sie wählen beim Start des Programms Ihren Sensor und die erste Mes-

sung wird bereits automatisch erstellt. Nach jeder Messung geben Sie an, wie viel Milliliter Lösung Sie zugefügt haben. Den Wert können Sie einfach von Ihrer Bürette ablesen, wenn Sie diese am Anfang bis zur 0-ml-Marke gefüllt haben. Sie haben nun für jede Messung die Zeit, die Sie benötigen, um die Lösung vorzubereiten, anders als bei einer zeitlich basierten Messung. Am Ende Ihrer Messung drücken Sie die Taste „2“ und erhalten Ihre Messwerte als Diagramm. Mit **[SHIFT][F1]** können Sie mit den Cursortasten die einzelnen Werte nachträglich genau betrachten. Das Programm „Titration 1.2“ eignet sich für pH-Messungen, Leitwert- und Temperatur-Titration. „Titration 1.2“ ist kompatibel zum CMA C-Lab, CASIO EA-200, Sensoren von Vernier und CMA und mit den Grafikrechnern FX-9750GII, FX-9860GII und FX-CG20.



## Testsoftware und Updates zum Herunterladen

## Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: [www.casio-schulrechner.de](http://www.casio-schulrechner.de)

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.00.3000
ClassPad 330 Plus	3.10.3000
ClassPad 330/300 Plus	3.06.3000
FX-CG20	2.00
FX-9860GII/SD	2.04
<b>Software</b>	
ClassPad II Manager	2.00.2000
ClassPad II Manager Subscription/Jahreslizenz	2.00.3001
ClassPad Manager	3.06.3000
FX-CG20 Manager	2.00
FX-Manager Plus	2.04
ClassWiz Emulator	v1.00
Subscription/Jahreslizenz	

Stand: Juli 2015



## Lehrersupport

## CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team umfassend bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

### Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur

## Impressum

**Herausgeber:**  
CASIO Europe GmbH  
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt  
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

**Bildquellen:**  
S. 1: M. Mettin, S. 4: Bildagentur shutterstock

**Vertriebspartner:**  
Österreich: Ivo Haas Lehrmittelversand und Verlag Ges.m.b.H  
Saalachstraße 36 • 5013 Salzburg  
Tel.: 0662/430 567-0 • E-Mail: [casio@ivohaas.com](mailto:casio@ivohaas.com)

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.

**Redaktion:**  
Gerhard Glas und Armin Baeger  
CASIO Educational Team • [education@casio.de](mailto:education@casio.de)

**Design:**  
CONSEQUENCE  
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

